

# BRAIDINGS OF POISSON GROUPS WITH QUASITRIANGULAR DUAL

FABIO GAVARINI<sup>†</sup> , GILLES HALBOUT<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Università di Roma “Tor Vergata”, Dipartimento di Matematica – Roma, ITALY

<sup>‡</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée, ULP–CNRS – Strasbourg, FRANCE

ABSTRACT. Let  $\mathfrak{g}$  be a quasitriangular Lie bialgebra over a field  $k$  of characteristic zero, and let  $\mathfrak{g}^*$  be its dual Lie bialgebra. We prove that the formal Poisson group  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  is a braided Hopf algebra. More generally, we prove that if  $(U_h, R)$  is any quasitriangular QUEA, then  $(U_h', Ad(R)|_{U_h' \otimes U_h'})$  — where  $U_h'$  is defined by Drinfeld — is a braided QFSA. The first result is then just a consequence of the existence of a quasitriangular quantization  $(U_h, R)$  of  $U(\mathfrak{g})$  and of the fact that  $U_h'$  is a quantization of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .

## Introduction

Let  $\mathfrak{g}$  be a Lie Lie bialgebra over a field  $k$  of characteristic zero; let  $\mathfrak{g}^*$  be the dual Lie bialgebra of  $\mathfrak{g}$ ; finally denote  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  the algebra of functions on the formal Poisson group associated to  $\mathfrak{g}^*$ . If  $\mathfrak{g}$  is quasitriangular, endowed with the  $r$ -matrix  $r$ , this gives  $\mathfrak{g}$  some additional properties. A question then rises: what new structure one obtains on the dual bialgebra  $\mathfrak{g}^*$ ? In this work we shall show that the topological Poisson Hopf algebra  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  is a braided Poisson algebra (we'll give the definition later on). This was already proved for  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$  by Reshetikhin (cf. [Re]), and generalised to the case where  $\mathfrak{g}$  is Kac-Moody of finite (cf. [G1]) or affine (cf. [G2]) type by the first author.

In order to prove the result, we shall use quantization of universal enveloping algebras. After Etingof-Kazhdan (cf. [EK]), each Lie bialgebra admits a quantization  $U_h(\mathfrak{g})$ , namely a topological Hopf algebra over  $k[[h]]$  whose specialisation at  $h = 0$  is isomorphic to  $U(\mathfrak{g})$  as a co-Poisson Hopf algebra; in addition, if  $\mathfrak{g}$  is quasitriangular and  $r$  is its  $r$ -matrix, then such a  $U_h(\mathfrak{g})$  exists which is quasitriangular too, as a Hopf algebra, with an  $R$ -matrix  $R_h (\in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}))$  such that  $R_h \equiv 1 + r h \pmod{h^2}$  (where we have identified, as vector spaces,  $U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})[[h]]$ ).

Now, after Drinfel'd (cf. [Dr]), for any quantised universal enveloping algebra  $U$  one can define also a certain Hopf subalgebra  $U'$  such that, if the semiclassical limit of  $U$  is  $U(\mathfrak{g})$  (with  $\mathfrak{g}$  a Lie bialgebra), then the semiclassical limit of  $U'$  is  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ . In our case,

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 17B37, 81R50

<sup>†</sup> Partially supported by a fellowship of the *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Italy)

when considering  $U_h(\mathfrak{g})'$  one can observe that the  $R$ -matrix does not belong, *a priori*, to  $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$ ; nevertheless, we prove that its adjoint action  $\mathfrak{R}_h := \text{Ad}(R_h) : U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ ,  $x \otimes y \mapsto R_h \cdot (x \otimes y) \cdot R_h^{-1}$ , stabilises  $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$ , hence it induces by specialisation an operator  $\mathfrak{R}_0$  on  $F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$ . Finally, the properties which make  $R_h$  an  $R$ -matrix imply that  $\mathfrak{R}_h$  is a braiding operator, whence the same holds for  $\mathfrak{R}_0$ : thus the pair  $(F[[\mathfrak{g}^*]], \mathfrak{R}_0)$  is braided Poisson algebra.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank M. Rosso and C. Kassel for several useful conversations.

## § 1. Recallings and definitions

**1.1 The classical objects.** Let  $k$  be a fixed field of characteristic zero. In the following  $k$  will be the ground field of all the objects — Lie algebras and bialgebras, Hopf algebras, etc. — which we'll introduce.

Following [CP], §1.3, we call Lie bialgebra a pair  $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$  where  $\mathfrak{g}$  is a Lie algebra and  $\delta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  is a antisymmetric linear map — called Lie cobracket — such that its dual  $\delta_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  be Lie bracket and that  $\delta_{\mathfrak{g}}$  itself be a 1-cocycle of  $\mathfrak{g}$  with values in  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Then it happens that also  $\mathfrak{g}^*$ , the linear dual of  $\mathfrak{g}$ , is a Lie bialgebra on its own. Following [CP], §2.1.B, we call quasitriangular Lie bialgebra a pair  $(\mathfrak{g}, r)$  such that  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  be a solution of the classical Yang-Baxter equation (CYBE)  $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$  in  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{g}$  be a Lie bialgebra with respect to the cobracket  $\delta = \delta_{\mathfrak{g}}$  defined by  $\delta(x) = [x, r]$ ; the element  $r$  is then called  $r$ -matrix of  $\mathfrak{g}$ .

If  $\mathfrak{g}$  is a Lie algebra, its universal enveloping algebra  $U(\mathfrak{g})$  is a Hopf algebra; if, in addition,  $\mathfrak{g}$  is a Lie bialgebra, then  $U(\mathfrak{g})$  is in fact a co-Poisson Hopf algebra (cf. [CP], §6.2.A).

Let  $\mathfrak{g}$  be any Lie algebra: then we call function algebra on the formal group associated to  $\mathfrak{g}$ , or simply formal group associated to  $\mathfrak{g}$ , the space  $F[[\mathfrak{g}]] := U(\mathfrak{g})^*$  linear dual of  $U(\mathfrak{g})$ . As  $U(\mathfrak{g})$  is a Hopf algebra, its dual  $F[[\mathfrak{g}]]$  is on its own a formal Hopf algebra (following [Di], Ch. 1). Note that, if  $G$  is a connected algebraic group whose tangent Lie algebra is  $\mathfrak{g}$ , letting  $F[G]$  be the Hopf algebra of regular functions on  $G$  and letting  $\mathfrak{m}_e$  be the maximal ideal of  $F[G]$  of functions vanishing at the unit point  $e \in G$ , the formal Hopf algebra  $F[[\mathfrak{g}]]$  is nothing but the  $\mathfrak{m}_e$ -adic completion of  $F[G]$  (cf. [On], Ch. I). When, in addition,  $\mathfrak{g}$  is a Lie bialgebra,  $F[[\mathfrak{g}]]$  is in fact a formal Poisson Hopf algebra (cf. [CP], §6.2.A).

**1.2 Braidings and quasitriangularity.** Let  $H$  be a Hopf algebra in a tensor category  $(\mathcal{A}, \otimes)$  (cf. [CP], §5):  $H$  is called braided (cf. [Re], Définition 2) if there exists an algebra automorphism  $\mathfrak{R}$  of  $H \otimes H$ , called braiding operator of  $H$ , different from the flip  $\sigma : H^{\otimes 2} \rightarrow H^{\otimes 2}$ ,  $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ , and such that

$$\mathfrak{R} \circ \Delta = \Delta^{\text{op}} \\ (\Delta \otimes id) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} \circ (\Delta \otimes id), \quad (id \otimes \Delta) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12} \circ (id \otimes \Delta)$$

where  $\Delta^{\text{op}}$  is the opposite comultiplication, i. e.  $\Delta^{\text{op}}(a) = \sigma \circ \Delta(a)$ , and  $\mathfrak{R}_{12}$ ,  $\mathfrak{R}_{13}$ , and  $\mathfrak{R}_{23}$  are the automorphisms of  $H \otimes H \otimes H$  defined by  $\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R} \otimes id$ ,  $\mathfrak{R}_{23} = id \otimes \mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}_{13} = (\sigma \otimes id) \circ (id \otimes \mathfrak{R}) \circ (\sigma \otimes id)$ .

Finally, when  $H$  is, in addition, a Poisson Hopf algebra, we'll say that it is braided — as a Poisson Hopf algebra — if it is braided — as a Hopf algebra — by a braiding which is also an automorphism of Poisson algebra.

If the pair  $(H, \mathfrak{R})$  is a braided algebra, it follows from the definition that  $\mathfrak{R}$  satisfies the quantum Yang-Baxter equation — QYBE in the sequel — in  $\text{End}(H^{\otimes 3})$ , that is

$$\mathfrak{R}_{12} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{23} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12}$$

which implies that, for all  $n \in \mathbb{N}$  the braid group  $\mathcal{B}_n$  acts on  $H^{\otimes n}$ , from which one can also obtain some knot invariants, according to the recipe given in [CP], §15.12.

A Hopf algebra  $H$  (in a tensor category) is said to be quasitriangular (cf. [Dr], [CP]) if there exists an invertible element  $R \in H \otimes H$ , called the  $R$ -matrix of  $H$ , such that

$$\begin{aligned} R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1} &= \text{Ad}(R)(\Delta(a)) = \Delta^{\text{op}}(a) \\ (\Delta \otimes \text{id})(R) &= R_{13}R_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \end{aligned}$$

where  $R_{12}, R_{13}, R_{23} \in H^{\otimes 3}$ ,  $R_{12} = R \otimes 1$ ,  $R_{23} = 1 \otimes R$ ,  $R_{13} = (\sigma \otimes \text{id})(R_{23}) = (\text{id} \otimes \sigma)(R_{12})$ . Then it follows from the identities above that  $R$  satisfies the QYBE in  $H^{\otimes 3}$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Thus, the tensor products of  $H$ -modules are endowed with an action of the braid group. Moreover, it is clear that if  $(H, R)$  is quasitriangular, then  $(H, \text{Ad}(R))$  is braided.

**1.3 The quantum objects.** Let  $\mathcal{A}$  be the category whose objects are the  $k[[h]]$ -modules which are topologically free and complete in  $h$ -adic sense, and the morphisms are the  $k[[h]]$ -linear continuous maps. For all  $V, W$  in  $\mathcal{A}$ , we define  $V \otimes W$  to be the projective limit of the  $k[[h]]/(h^n)$ -modules  $(V/h^n V) \otimes_{k[[h]]/(h^n)} (W/h^n W)$ : this makes  $\mathcal{A}$  into a tensor category (see [CP] for further details). After Drinfel'd (cf. [Dr]), we call quantised universal enveloping algebra — QUEA in the sequel — any Hopf algebra in the category  $\mathcal{A}$  whose semiclassical limit (= specialisation at  $h = 0$ ) is the universal enveloping algebra of a Lie bialgebra. Similarly, we call quantised formal series Hopf algebra — QFSHA in the sequel — any Hopf algebra in the category  $\mathcal{A}$  whose semiclassical limit is the function algebra of a formal group.

In the sequel, we shall need the following result:

**Theorem 1.4.** (cf. [EK]) *Let  $\mathfrak{g}$  be a Lie bialgebra. Then there exists a QUEA  $U_h(\mathfrak{g})$  whose semiclassical limit is isomorphic to  $U(\mathfrak{g})$ ; furthermore, there exists an isomorphism of  $k[[h]]$ -modules  $U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})[[h]]$ .*

*In addition, if  $\mathfrak{g}$  is quasitriangular, with  $r$ -matrix  $r$ , then there exists a QUEA  $U_h(\mathfrak{g})$  as above and an element  $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$  such that  $(U_h(\mathfrak{g}), R_h)$  be a quasitriangular Hopf algebra and  $R_h = 1 + r h + O(h^2)$  (with  $O(h^2) \in h^2 \cdot H \otimes H$ ).  $\square$*

**1.5 The Drinfeld's functor.** Let  $H$  be a Hopf algebra over  $k[[h]]$ . For all  $n \in \mathbb{N}$ , define  $\Delta^n: H \rightarrow H^{\otimes n}$  by  $\Delta^0 := \epsilon$ ,  $\Delta^1 := \text{id}_H$ , and  $\Delta^n := (\Delta \otimes \text{id}_H^{\otimes (n-2)}) \circ \Delta^{n-1}$  if  $n > 2$ . For all ordered subset  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  with  $i_1 < \dots < i_k$ , define the homomorphism  $j_\Sigma: H^{\otimes k} \rightarrow H^{\otimes n}$  by  $j_\Sigma(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) := b_1 \otimes \dots \otimes b_n$  with  $b_i := 1$  if  $i \notin \Sigma$  and  $b_{i_m} := a_m$  for  $1 \leq m \leq k$ ; then set  $\Delta_\Sigma := j_\Sigma \circ \Delta^k$ . Finally, define

$\delta_n: H \longrightarrow H^{\otimes n}$  by  $\delta_n := \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} \Delta_\Sigma$ , for all  $n \in \mathbb{N}_+$ . More in general, for all  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , with  $i_1 < \dots < i_k$ , define

$$\delta_\Sigma := \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} (-1)^{|\Sigma| - |\Sigma'|} \Delta_{\Sigma'} ; \quad (1.1)$$

(in particular,  $\delta_{\{1, \dots, n\}} = \delta_n$ ). Thanks to the inclusion-exclusion principle, this is equivalent to

$$\Delta_\Sigma = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} \delta_{\Sigma'} \quad (1.2)$$

for all  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  with  $i_1 < \dots < i_k$ . Finally, define

$$H' := \{ a \in H \mid \delta_n(a) \in h^n H^{\otimes n} \},$$

a subspace of  $H$  which we consider endowed with the induced topology. Then we have

**Theorem 1.6.** (cf. [Dr], §7, ou [G3]) *Let  $H$  be a Hopf algebra in the category  $\mathcal{A}$ . Then  $H'$  is a QFSHA. Moreover, if  $H = U_h(\mathfrak{g})$  is a QUEA, with  $U(\mathfrak{g})$  as semiclassical limit, then the semiclassical limit of  $U_h(\mathfrak{g})'$  is  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .  $\square$*

## § 2. The main results

From the technical point of view, the main result of this paper concerns the general framework of quasitriangular Hopf algebras:

**Theorem 2.1.** *Let  $H$  be a quasitriangular Hopf algebra in the category  $\mathcal{A}$ , and let  $R$  be its  $R$ -matrix. Then, the inner automorphism  $\text{Ad}(R): H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  restricts to an automorphism of  $H' \otimes H'$ , and the pair  $\left( H', \text{Ad}(R)|_{H' \otimes H'} \right)$  is a braided Hopf algebra in the category  $\mathcal{A}$ .  $\square$*

The proof of this theorem will be given in section 3. Nevertheless, we can already get out of it as a consequence the main result announced by the title and in the introduction, which gives us a geometrical interpretation of the classical  $r$ -matrix:

**Theorem 2.2.** *Let  $\mathfrak{g}$  be a quasitriangular Lie bialgebra. Then the topological Poisson Hopf algebra  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  is braided. Moreover, there exists a quantisation of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  which is a braided Hopf algebra whose braiding operator specialises into that of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .*

*Proof.* Let  $r$  be the  $r$ -matrix of  $\mathfrak{g}$ . By Theorem 1.4, there exists a quasitriangular QUEA  $(U_h(\mathfrak{g}), R_h)$  whose semiclassical limit is exactly  $(U(\mathfrak{g}), r)$ : that is,  $U_h(\mathfrak{g})/h U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$  and  $(R-1)/h \equiv r \bmod h U_h(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ ; and by Theorem 1.6, the semiclassical limit of  $U_h(\mathfrak{g})'$  is  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ . Let  $\mathfrak{R}_h := \text{Ad}(R_h)$ : then Theorem 2.1 ensures that  $\left( U_h(\mathfrak{g})', \mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'} \right)$  is a braided Hopf algebra, hence its semiclassical limit  $\left( F[[\mathfrak{g}^*]], \left( \mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'} \right) \Big|_{h=0} \right)$

is braided as well. Furthermore, as  $\mathfrak{R}_h$  is an algebra automorphism and the Poisson bracket of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  is given by  $\{a, b\} = ([\alpha, \beta]/h)|_{h=0}$  for all  $a, b \in F[[\mathfrak{g}^*]]$  and  $\alpha, \beta \in U_h(\mathfrak{g})'$  such that  $\alpha|_{h=0} = a$ ,  $\beta|_{h=0} = b$ , we have that  $\left(\mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'}\right)|_{h=0}$  is also an automorphism of Poisson algebra.  $\square$

The theorem above gives a geometrical interpretation of the  $r$ -matrix of a quasitriangular Lie bialgebra. This very result had been proved for  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$  by Reshetikhin (cf. [Re]), and generalised to the case when  $\mathfrak{g}$  is Kac-Moody of finite type (cf. [G1], where a more precise analysis is carried on) or affine type (cf. [G2]) by the first author.

Theorem 2.2 has also an important consequence. Let  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{g}^*$  be as above, let  $\mathfrak{R}$  be the braiding of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ , and let  $\mathfrak{e}$  be the (unique) maximal ideal of  $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]] = F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$  (topological tensor product, following [Di], Ch. 1). Now,  $\mathfrak{R}$  is an algebra automorphism, hence  $\mathfrak{R}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}$ , and  $\mathfrak{R}$  induces an automorphism of vector space  $\overline{\mathfrak{R}}: \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \rightarrow \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$ ; in addition,  $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ , and since  $\mathfrak{R}$  is also an automorphism of Poisson algebra, one has that  $\overline{\mathfrak{R}}$  is a Lie algebra automorphism of  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$ ; the other properties of the braiding  $\mathfrak{R}$  make so that  $\overline{\mathfrak{R}}$  have other corresponding properties. Finally, the dual  $\overline{\mathfrak{R}}^*: \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$  is a Lie coalgebra automorphism of  $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ , enjoying many other properties dual of those of  $\overline{\mathfrak{R}}$ . In particular,  $\mathfrak{R}$ ,  $\overline{\mathfrak{R}}$  and  $\overline{\mathfrak{R}}^*$  are solutions of the QYBE, whence there is an action of the braid group  $\mathcal{B}_n$  on  $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]]^{\otimes n}$ , on  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^{\otimes n}$ , and on  $(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*)^{\otimes n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), and from that one can obtain knot invariants (following [CP], §15.12). Now, such automorphisms of  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$  and of  $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$  have been introduced in [WX], §9, related to the so-called "global  $R$ -matrix", which also yields a geometrical interpretation of the classical  $r$ -matrix: comparing our results with those of [WX], as well as the functoriality properties of our construction, will be the matter of a forthcoming article.

### § 3. Proof of theorem 2.1

In this section  $(H, R)$  will be a quasitriangular Hopf algebra as in the statement of Theorem 2.1. We want to study the adjoint action of  $R$  on  $H \otimes H$ , where the latter is endowed with its natural structure of Hopf algebra; we denote by  $\tilde{\Delta}$  its coproduct, defined by  $\tilde{\Delta} := s_{23} \circ (\Delta \otimes id_H \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \Delta)$  where  $s_{23}$  denotes the flip in the positions 2 and 3. We'll denote also  $I := 1 \otimes 1$  the unit in  $H \otimes H$ . After our definition of tensor product in  $\mathcal{A}$ , we have  $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$ . Our goal is to show that, although  $R$  do not necessarily belong to  $(H \otimes H)'$ , its adjoint action  $a \mapsto R \cdot a \cdot R^{-1}$  leaves stable  $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$ .

First of all set, for  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , always with  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $R_\Sigma := R_{2i_1-1, 2i_k} R_{2i_1-1, 2i_{k-1}} \cdots R_{2i_1-1, 2i_1} R_{2i_2-1, 2i_k} \cdots R_{2i_{k-1}-1, 2i_k} R_{2i_k-1, 2i_1} \cdots R_{2i_k-1, 2i_1}$  (product of  $k^2$  terms) where  $R_{i,j} := j_{\{i,j\}}(R)$ , defining  $j_{\{r,s\}}: H \otimes H \rightarrow H^{\otimes 2n}$  as before. We shall always write  $|\Sigma|$  for the cardinality of  $\Sigma$  (here  $|\Sigma| = k$ ).

**Lemma 3.1.** *In  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ , for all  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ , we have:  $\tilde{\Delta}_\Sigma(R) = R_\Sigma$ .*

*Proof.* With no loss of generality, we'll prove the result for  $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ , i.e.

$$\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(R) = R_{\{1, \dots, n\}} = R_{1, 2n} \cdot R_{1, 2n-2} \cdots R_{1, 2} \cdot R_{3, 2n} \cdots R_{2n-3, 2} \cdot R_{2n-1, 2n} \cdots R_{2n-1, 2}.$$

The result is evident at rank  $n = 1$ . Assume it be true at rank  $n$ , and prove it at rank  $n + 1$ ; by definition of  $\tilde{\Delta}$  and by the properties of the  $R$ -matrix we have

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n+1\}}(R) &= \left( \tilde{\Delta} \otimes id_{H \otimes H}^{\otimes n-1} \right) (\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(R)) = \left( \tilde{\Delta} \otimes id_{H \otimes H}^{\otimes n-1} \right) (R_{\{1, \dots, n\}}) \\
&= s_{23}(\Delta \otimes id_H^{\otimes 2n}) \left( id_H \otimes \Delta \otimes id_H^{\otimes (2n-2)} \right) (R_{1,2n} \cdots R_{1,2} \cdots R_{3,2} \cdots R_{2n-1,2}) \\
&= s_{23}(\Delta \otimes id_H^{\otimes 2n}) (R_{1,2n+1} \cdots R_{1,3} R_{1,2} \cdots R_{4,3} R_{4,2} \cdots R_{2n,3} R_{2n,2}) = \\
&= s_{23}(R_{1,2n+2} R_{2,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{2,4} R_{1,3} R_{2,3} \cdots R_{5,4} R_{5,3} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,3}) \\
&= R_{1,2n+2} R_{3,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{3,4} \cdot R_{1,2} R_{3,2} \cdots R_{5,4} \cdot R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{1,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{1,2} R_{3,2n+2} \cdots R_{3,4} R_{3,2} \cdots R_{5,4} R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{\{1, \dots, n+1\}}, \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

From now on we shall use the notation  $C_b^a := \binom{b}{a}$  for all  $a, b \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 3.2.** *For all  $a \in (H \otimes H)'$ , and for all set  $\Sigma$  such that  $|\Sigma| > i$ , we have*

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| \leq i} (-1)^{i-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{i+1}).$$

*Proof.* It is enough to prove the claim for  $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ , with  $n > i$ . Due to (1.2), we have

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(a) &= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) = \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}, |\bar{\Sigma}| \leq i} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}, |\bar{\Sigma}| \leq i} \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma}} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\}, |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \Sigma, |\bar{\Sigma}| \leq i} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|} + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\}, |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) (-1)^{i-|\Sigma'|} C_{n-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} + O(h^{i+1}), \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

Before going on with the main result, we need still another minor technical fact about the binomial coefficients: one can easily prove it using the formal series expansion of  $(1 - X)^{-(r+1)}$ , namely  $(1 - X)^{-(r+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r X^k$ .

**Lemma 3.3.** *Let  $r, s, t \in \mathbb{N}$  be such that  $r < t$ . Then we have the following relations (where we set  $C_u^v := 0$  if  $v > u$ ):*

$$(a) \quad \sum_{d=0}^t (-1)^d C_{d-1}^r C_t^d = -(-1)^r, \quad (b) \quad \sum_{d=0}^t (-1)^d C_{d+s}^r C_t^d = 0. \quad \square$$

Finally, here is the main result of this section:

**Proposition 3.4.** *For all  $a \in (H \otimes H)'$ , we have  $R a R^{-1} \in (H \otimes H)'$ .*

*Proof.* As we have to show that  $R a R^{-1}$  belongs to  $(H \otimes H)'$ , we have to consider the terms  $\delta_n(R a R^{-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . For this we go and re-write  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1})$  by using Lemma 3.1 and the fact that  $\tilde{\Delta}$  and more in general  $\tilde{\Delta}_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ , for  $k \leq n$ , are algebra morphisms; then  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{-1}$ .

We shall prove by induction on  $i$  that

$$\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = O(h^{i+1}) \quad \text{for all } 0 \leq i \leq n-1. \quad (\star)$$

In other words, we'll see that all the terms of the expansion truncated at the order  $n-1$  are zero, hence  $\delta_n(R a R^{-1}) = O(h^n)$ , whence our claim.

For  $i = 0$ , we have, for each  $\Sigma$ :  $\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \epsilon(a)I^{\otimes n} + O(h)$  and  $R_\Sigma = I^{\otimes n} + O(h)$ , and similarly  $R_\Sigma^{-1} = I^{\otimes n} + O(h)$ , whence  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} \epsilon(a) I^{\otimes n} + O(h) = O(h)$ , thus the result  $(\star)$  is true for  $i = 0$ .

Let's assume the result  $(\star)$  proved for all  $i' < i$ . Write the  $h$ -adic expansions of  $R_\Sigma$  and  $R_\Sigma^{-1}$  in the form  $R_\Sigma = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_\Sigma^{(\ell)} h^\ell$  and  $R_\Sigma^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} R_\Sigma^{(-m)} h^m$ . By the previous proposition, we have an approximation of  $\tilde{\Delta}_\Sigma(a)$  at the order  $j$

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| \leq j} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{j+1}).$$

Then we have the following approximation of  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1})$ :

$$\begin{aligned} \delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) &= \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} \sum_{\ell+m \leq i} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{(-m)} h^{\ell+m} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^i \sum_{\ell+m=i-j} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma| > j}} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \Sigma \\ |\Sigma'| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{(-m)} \right) h^{\ell+m} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^i \sum_{\ell+m+j=i} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-|\Sigma'|} R_{\Sigma'}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma'}^{(-m)} \right) h^{\ell+m} + O(h^{i+1}). \end{aligned}$$

We denote (E) the last expression in brackets, and we'll show that this expression is zero, whence  $\delta_n(R a R^{-1}) = O(h^{i+1})$ .

Let's look first at the terms corresponding to  $\ell + m = 0$ , that is  $j = i$ . Then we find back  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(a)$ , which is in  $O(h^{i+1})$  by assumption. Therefore, by now on in the sequel of the computation we assume  $\ell + m > 0$ .

Consider first how the terms  $R_\Sigma^{(\ell)}$  and  $R_\Sigma^{(-m)}$  act on  $(H \otimes H)'^{\otimes n}$  (respectively on the left and on the right) for  $\ell + m$  fixed (and positive), say  $\ell + m = S$ .

Taking the truncated expansion of each  $R_{i,j}$  which occurs in  $R_\Sigma$ , we see that  $R_\Sigma^{(\ell)}$  and  $R_\Sigma^{(-m)}$  are sums of products of at most  $\ell$  and  $m$  terms respectively, each one acting on at most two tensor of  $(H \otimes H)'^{\otimes n}$ . We re-write  $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)}$  by gathering

together the terms of the sum which act on the same factors of  $(H \otimes H)'^{\otimes n}$ : we'll denote the set of positions of this factors by  $\Sigma''$ .

Now, if  $i$  belongs to  $\Sigma''$ , in the identification  $(H \otimes H)^{\otimes n} = H^{\otimes 2n}$  (such as we chose it to define  $R_\Sigma$ ) the index  $i$  corresponds to the pair  $(2i-1, 2i)$ ; but then  $R_\Sigma$  and  $R_\Sigma^{-1}$ , and then also each  $R_\Sigma^{(\ell)}$  and each  $R_\Sigma^{(-m)}$ , may act non-trivially on the  $i$ -th factor of  $\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)$  only if one of  $2i-1$  and  $2i$  (or even both of them) occurs in the explicit written expression of  $R_\Sigma$  (in  $H^{\otimes 2n}$ ), hence only if  $i \in \Sigma$ : thus  $\Sigma'' \subseteq \Sigma$ . Then we set  $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} =$

$$\sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma, \Sigma''}^{(S)}(a).$$

Now consider  $\bar{\Sigma} \supseteq \Sigma$ . From the very definition we have  $R_{\bar{\Sigma}} = R_\Sigma + \mathcal{A}$ , where  $\mathcal{A}$  is a sum of terms which contain factors  $R_{2i-1, 2j}^{(s)}$  with  $\{i, j\} \not\subseteq \Sigma$ : to see this, it is enough to expand every factor  $R_{a,b}$  in  $R_{\bar{\Sigma}}$  as  $R_{a,b} = 1^{\otimes 2n} + O(h)$ . Similarly, we have also  $R_{\bar{\Sigma}}^{(\ell)} = R_\Sigma^{(\ell)} + \mathcal{A}'$ , and similarly  $R_{\bar{\Sigma}}^{(-m)} = R_\Sigma^{(-m)} + \mathcal{A}''$ . This implies that  $A_{\Sigma'', \bar{\Sigma}, \Sigma'}^{(S)}(a) = A_{\Sigma'', \Sigma, \Sigma'}^{(S)}(a)$ , and so the  $A_{\Sigma'', \Sigma, \Sigma'}^{(S)}(a)$  do not depend on  $\Sigma$ ; then we write

$$\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(S)}(a).$$

In the sequel we re-write (E) using the  $A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(S)}(a)$ . In the following we'll denote by  $\delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'}$  the function whose value is 1 if  $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$  and 0 if not.

Then we obtain a new expression for  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1})$ , namely

$$\begin{aligned} \delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) &= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) + (-1)^{n-|\Sigma'|} \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) \right) h^{i-j} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} h^{i-j} \sum_{\Sigma'' \subseteq \{1, \dots, n\}} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'} \right) + O(h^{i+1}). \end{aligned}$$



We denote  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  the new expression in brackets; in other words, for fixed  $\Sigma'$  and  $\Sigma''$ , with  $|\Sigma'| \leq j$ , we set

$$(E')_{\Sigma', \Sigma''} := \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'}$$

(by the way, we remark that this is a purely combinatorial expression); we shall show that this expression is zero when  $\Sigma'$  and  $\Sigma''$  are such that  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq j-i+|\Sigma'|$  and  $|\Sigma'| \leq j$ . In force of the following lemma, this will be enough to prove Proposition 3.4.

**Lemma 3.5.**

(a) We have  $j < i$  and  $i \leq n-1$ , hence  $j \leq n-2$ .

(b) For all  $S > 0$ , in the expression  $\sum_{\ell+m=S} R_{\Sigma}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma}^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a)$

we have that  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a) = 0$  for all  $\Sigma', \Sigma''$  such that  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > S + |\Sigma'|$ .

*Proof.* The first part of the statement is trivial; to prove the second, we study the adjoint action of  $R_{\Sigma}$  on  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ .

First of all, on  $k \cdot I^{\otimes n}$  the action of these elements gives a zero term because one gets the term at the order  $S$  of the  $h$ -adic expansion of  $R_{\Sigma} \cdot R_{\Sigma}^{-1} = 1$  (for  $S > 0$ ).

Second, let us consider  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ , and let us study the action on  $(H \otimes H)_{\Sigma'} := j_{\Sigma'} \left( (H \otimes H)^{\otimes |\Sigma|} \right) (\subseteq (H \otimes H)^{\otimes n})$ . We know that  $R_{\Sigma}$  is a product of  $|\Sigma|^2$  terms of type  $R_{a,b}$ , with  $a, b \in \{2i-1, 2j \mid i, j \in \Sigma\}$ ; so let's analyse what happens when one computes the product  $P := R_{\Sigma} \cdot x \cdot R_{\Sigma}^{-1}$  if  $x \in (H \otimes H)_{\Sigma}$ .

Consider the rightmost factor  $R_{a,b}$ : if  $a, b \notin \{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ , then when computing  $P$  one gets  $P := R_{\Sigma} x R_{\Sigma}^{-1} = R_{\star} R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_{\star}^{-1} = R_{\star} x R_{\star}^{-1}$  (where  $R_{\star} := R_{\Sigma} R_{a,b}^{-1}$ ). Similarly, moving further on from right to left along  $R_{\Sigma}$  one can discard all factors  $R_{c,d}$  of this type, namely those such that  $c, d \notin \{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ . Thus the first factor whose adjoint action is non-trivial will be necessarily of type  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  with one of the two indices belonging to  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ , say for instance  $\bar{a}$ . Notice that the new index  $\bar{a} (\in \{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\})$  — which "marks" a tensor factor in  $H^{\otimes 2n}$  — corresponds to a new index  $j_{\bar{a}} (\in \{1, \dots, n\})$  — marking a tensor factor of  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ . So for the following factors — i.e. on the left of  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  — one has to repeat the same analysis, but with the set  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma' \cup \{j_{\bar{a}}\}\}$  instead of  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ ; therefore, as  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  might act in non-trivial way on at most  $|\Sigma'|$  factors of  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ , similarly the factor which is the closest on its left may act in a non-trivial way on at most  $|\Sigma'| + 1$  factors. The upset is that the adjoint action of  $R_{\Sigma}$  is non-trivial on at most  $|\Sigma'| + |\Sigma|$  factors of  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ .

Now consider the different terms  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  and  $R_{\Sigma}^{(-m)}$ , with  $\ell + m = S$ , and study the products  $R_{\Sigma}^{(\ell)} \cdot x \cdot R_{\Sigma}^{(-m)}$ , with  $x \in (H \otimes H)_{\Sigma}$ . We already know that  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  and  $R_{\Sigma}^{(-m)}$  are sums of products, denoted  $P_+$  and  $P_-$ , of at most  $\ell$  and  $m$  terms respectively, of type  $R_{i,j}^{(\pm k)}$ ; the terms  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a)$  then are nothing but sums of terms of type  $P_+ \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) P_-$ ,

where in addition the products  $P_+$  and  $P_-$  have their "positions" in  $\Sigma''$ . Now, since each  $P_+$  and each  $P_-$  is a product of at most  $\ell$  and  $m$  factors  $R_{i,j}^{(\pm k)}$ , one can refine the previous argument. Consider only the term at the order  $S$  of the  $h$ -adic expansion of  $P := R_\Sigma x R_\Sigma^{-1} = R_\star R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_\star^{-1} = R_\star x R_\star^{-1}$ : whenever there are factors of type  $R_{a,b}^{(k)}$  or  $R_{a,b}^{(t)}$ , for fixed  $a, b$  — not belonging to  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$  — which appear in  $R_\Sigma^{(\ell)}$  or  $R_\Sigma^{(-m)}$ , for some  $\ell$  or  $m$ , the total contribution of all these terms in the sum  $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} x R_\Sigma^{(-m)}$  will be zero (this follows from the fact that  $R_\star R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_\star^{-1} = R_\star x R_\star^{-1}$ ). In addition, since now we are dealing only with  $S$  factors in total, we conclude that  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a) = 0$  if  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > S + |\Sigma'|$ .  $\square$

Now we shall compute  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$ . Thanks to the previous remark, we can limit ourselves to consider the pairs  $(\Sigma', \Sigma'')$  such that  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq i - j + m + |\Sigma'| \leq i - j + j = i \leq n - 1$ . Then one can always find at least two  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$  such that  $|\Sigma| > j$  and  $\Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma$ , which make us sure that there will always be at least two terms in the calculation which is to follow (such a condition will guarantee the vanishing of the expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$ ). We distinguish three cases:

(I) If  $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$ , then the expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  becomes

$$(E' : 1)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}.$$

Gathering together the  $\Sigma$ 's which share the same cardinality  $d$ , a simple computation gives

$$(E' : 1)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=j+1}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma'|}^{d-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}.$$

Now, this last expression is zero by Lemma 3.3, for it corresponds to a sum of type  $\sum_{k=r+1}^t (-1)^{t+r-k} C_{k-1}^r C_t^k + (-1)^t = \sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k-1}^r C_t^k + (-1)^t$  (where  $C_u^v := 0$  if  $v > u$ ) with  $r, t \in \mathbb{N}_+$  and  $r < t$ : in our case we set  $t = n - |\Sigma'|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$  and  $k = d - |\Sigma'|$ ; one verifies that one has just  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  because  $j < n$ .

(II) If  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$  and  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > j$ , then the expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  becomes

$$(E' : 2)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}.$$

Gathering together the  $\Sigma$ 's which share the same cardinality  $d$ , a simple computation gives

$$(E' : 2)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=|\Sigma' \cup \Sigma''|}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|}.$$

Again, the last expression is zero thanks to Lemma 3.3, for it corresponds to a sum of type  $\sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k$  with  $r, t, s \in \mathbb{N}_+$  and  $r < t$ : in our case we set

$t = n - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$ ,  $s = |\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1$  and  $k = d - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ; then one verifies that  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  for  $j < n$  and  $|\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1 \geq 0$  since  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$ .

(III) If  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$  and  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq j$ , then the expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  becomes

$$(E' : 3)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}.$$

Gathering together the  $\Sigma$ 's which share the same cardinality  $d$ , a simple computation gives

$$(E' : 3)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=j+1}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|}.$$

But again the last expression is zero because of Lemma 3.3, for it corresponds to a sum of type  $\sum_{k=j+1-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k = \sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k$  (where  $C_u^v := 0$  if  $v > u$ ) with  $r, t, s \in \mathbb{N}_+$  and  $r < t$ : here again we set  $t = n - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$ ,  $s = |\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1$  and  $k = d - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ; one has, always for the same reasons,  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  and  $|\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1 \geq 0$ .

Therefore, one has always  $(E')_{\Sigma', \Sigma''} = 0$ , whence  $(E) = 0$ , which ends the proof.  $\square$

## REFERENCES

- [CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Di] J. Dixmier, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Applied Mathematics **20** (1973).
- [Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. Intern. Congress of Math. (Berkeley, 1986), 1987, pp. 798–820.
- [EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. (New Series) **2** (1996), 1–41.
- [G1] F. Gavarini, *Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum groups at Roots of 1*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 95–117.
- [G2] F. Gavarini, *The R-matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1* (to appear in Jour. Pure Appl. Algebra).
- [G3] F. Gavarini, *The quantum duality principle*, Preprint.
- [On] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **20** (1993).
- [Re] N. Reshetikhin, *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 79–99.
- [WX] A. Weinstein, P. Xu, *Classical Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation*, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 309–343.

<sup>†</sup> UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “TOR VERGATA” — DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 1 — I-00133 ROMA, ITALY — E-MAIL: GAVARINI@MAT.UNIROMA2.IT

<sup>‡</sup> INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE — E-MAIL: HALBOUT@MATH.U-STRASBG.FR  
7, RUE RENÉ DESCARTES — 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE

# TRESSAGES DES GROUPES DE POISSON À DUAL QUASITRIANGULAIRE

FABIO GAVARINI<sup>†</sup> , GILLES HALBOUT<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Università di Roma “Tor Vergata”, Dipartimento di Matematica – Roma, ITALY

<sup>‡</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée, ULP–CNRS – Strasbourg, FRANCE

ABSTRACT. Let  $\mathfrak{g}$  be a quasitriangular Lie bialgebra over a field  $k$  of characteristic zero, and let  $\mathfrak{g}^*$  be its dual Lie bialgebra. We prove that the formal Poisson group  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  is a braided Hopf algebra. More generally, we prove that if  $(U_h, R)$  is any quasitriangular QUEA, then  $(U_h', Ad(R)|_{U_h' \otimes U_h'})$  — where  $U_h'$  is defined by Drinfeld — is a braided QFSA. The first result is then just a consequence of the existence of a quasitriangular quantization  $(U_h, R)$  of  $U(\mathfrak{g})$  and of the fact that  $U_h'$  is a quantization of  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .

## Introduction

Soit  $\mathfrak{g}$  une bigèbre de Lie sur un corps  $k$  de caractéristique zéro; notons  $\mathfrak{g}^*$  la bigèbre de Lie duale de  $\mathfrak{g}$  et  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  l’algèbre des fonctions sur le groupe de Poisson formel associé à  $\mathfrak{g}^*$ . Si  $\mathfrak{g}$  est quasitriangulaire, munie d’une  $r$ -matrice  $r$ , cela donne à  $\mathfrak{g}$  certaines propriétés additionnelles. Une question se pose alors: quelle nouvelle structure obtient-on sur la bigèbre duale  $\mathfrak{g}^*$ ? Dans ce travail, nous allons montrer que l’algèbre de Hopf-Poisson topologique  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  est une algèbre tressée (nous donnerons la définition plus loin). Cela avait été démontré pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$  par Reshetikhin (cf. [Re]), et généralisé au cas où  $\mathfrak{g}$  est de Kac-Moody de type fini (cf. [G1]) ou de type affine (cf. [G2]) par le premier auteur.

Pour démontrer le résultat, nous allons utiliser les quantifications d’algèbres enveloppantes. D’après Etingof-Kazhdan (cf. [EK]), toute bigèbre de Lie admet une quantification  $U_h(\mathfrak{g})$ , à savoir une algèbre de Hopf (topologique) sur  $k[[h]]$  dont la spécialisation à  $h = 0$  est isomorphe à  $U(\mathfrak{g})$  comme algèbre de Hopf co-Poisson; de plus, si  $\mathfrak{g}$  est quasitriangulaire et  $r$  est sa  $r$ -matrice, alors il existe une quantification  $U_h(\mathfrak{g})$  qui est aussi quasitriangulaire, en tant qu’algèbre de Hopf, munie d’une  $R$ -matrice  $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$  telle que  $R_h \equiv 1 + r h \pmod{h^2}$  (où l’on identifie les espaces vectoriels  $U_h(\mathfrak{g})$  et  $U(\mathfrak{g})[[h]]$ ).

D’après Drinfel’d (cf. [Dr]), pour toute algèbre enveloppante universelle quantifiée  $U$ , on peut définir une sous-algèbre de Hopf  $U'$  telle que, si la limite semi-classique de  $U$  est  $U(\mathfrak{g})$  (avec  $\mathfrak{g}$  une bigèbre de Lie), alors la limite semi-classique de  $U'$  est  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ . Dans notre cas,

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 17B37, 81R50

Le premier auteur a été en partie financé par une bourse du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Italy)

si l'on considère  $U_h(\mathfrak{g})'$ , on peut remarquer que la  $R$ -matrice n'appartient pas, *a priori*, à  $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$ ; néanmoins, nous prouvons que son action adjointe  $\mathfrak{R}_h := \text{Ad}(R_h) : U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ ,  $x \otimes y \mapsto R_h \cdot (x \otimes y) \cdot R_h^{-1}$ , stabilise  $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$ , donc induit par spécialisation un opérateur  $\mathfrak{R}_0$  sur  $F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$ . Enfin, les propriétés qui font de  $R_h$  une  $R$ -matrice font de  $\mathfrak{R}_h$  un opérateur de tressage, donc il en est de même pour  $\mathfrak{R}_0$ : ainsi, la paire  $(F[[\mathfrak{g}^*]], \mathfrak{R}_0)$  est une algèbre tressée.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier M. Rosso et C. Kassel pour de nombreux entretiens.

## § 1. Définitions et rappels

**1.1 Les objets classiques.** Soit  $k$  un corps fixé de caractéristique zero. Dans la suite  $k$  sera le corps de base de tous les objets — algèbres et bigèbres de Lie, algèbres de Hopf, etc. — que nous introduirons.

Suivant [CP], §1.3, nous appelons bigèbre de Lie une paire  $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$  où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie et  $\delta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  est une application linéaire antisymétrique — dite cocrochet de Lie — telle que son dual  $\delta_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  soit un crochet de Lie et que  $\delta_{\mathfrak{g}}$  elle même soit un 1-cocycle de  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Le dual linéaire  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  est alors à son tour une bigèbre de Lie. Suivant [CP], §2.1.B, nous appelons bigèbre de Lie quasitriangulaire une paire  $(\mathfrak{g}, r)$  telle que  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  soit solution de l'équation de Yang-Baxter classique (CYBE)  $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$  dans  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}$  soit une bigèbre de Lie par rapport au cocrochet  $\delta = \delta_{\mathfrak{g}}$  défini par  $\delta(x) = [x, r]$ ; l'élément  $r$  est alors appelé  $r$ -matrice de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante universelle  $U(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Hopf; si de plus  $\mathfrak{g}$  est une bigèbre de Lie, alors  $U(\mathfrak{g})$  est en fait une algèbre de Hopf co-Poisson (cf. [CP], §6.2.A).

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie quelconque: on appelle algèbre de fonctions sur le groupe formel associé à  $\mathfrak{g}$ , ou tout simplement groupe formel associé à  $\mathfrak{g}$ , l'espace  $F[[\mathfrak{g}]] := U(\mathfrak{g})^*$  dual linéaire de  $U(\mathfrak{g})$ . Comme  $U(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Hopf, son dual  $F[[\mathfrak{g}]]$  est une algèbre de Hopf formelle (suivant [Di], Ch. 1). Remarquons que si  $G$  est un groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et  $F[G]$  est l'algèbre de Hopf des fonctions régulières sur  $G$ , et si  $\mathfrak{m}_e$  est l'idéal maximal dans  $F[G]$  des fonctions qui s'annulent au point unité  $e \in G$ , alors l'algèbre de Hopf formelle  $F[[\mathfrak{g}]]$  n'est rien d'autre que la complétion  $\mathfrak{m}_e$ -adique de  $F[G]$  (cf. [On], Ch. I). Lorsque, de plus,  $\mathfrak{g}$  est une bigèbre de Lie,  $F[[\mathfrak{g}]]$  est en fait une algèbre de Hopf-Poisson (cf. [CP], §6.2.A) formelle.

**1.2 Tressages et quasitriangularité.** Soit  $H$  une algèbre de Hopf dans une catégorie tensorielle  $(\mathcal{A}, \otimes)$  (cf. [CP], §5):  $H$  est dite tressée (cf. [Re], Définition 2) s'il existe un automorphisme d'algèbre  $\mathfrak{R}$  de  $H \otimes H$ , appelé opérateur de tressage de  $H$ , différent de la volte  $\sigma : a \otimes b \mapsto b \otimes a$  et vérifiant

$$\mathfrak{R} \circ \Delta = \Delta^{\text{op}} \\ (\Delta \otimes \text{Id}) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} \circ (\Delta \otimes \text{Id}), \quad (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12} \circ (\text{Id} \otimes \Delta)$$

où  $\Delta^{\text{op}} = \sigma \circ \Delta$  et  $\mathfrak{R}_{12}$ ,  $\mathfrak{R}_{13}$  et  $\mathfrak{R}_{23}$  sont les automorphismes de  $H \otimes H \otimes H$  définis par  $\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R} \otimes \text{Id}$ ,  $\mathfrak{R}_{23} = \text{Id} \otimes \mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}_{13} = (\sigma \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \mathfrak{R}) \circ (\sigma \otimes \text{Id})$ .

Enfin, dans le cas où  $H$  est, de plus, une algèbre de Hopf Poisson, nous dirons que cette algèbre est tressée en tant qu'algèbre de Hopf Poisson si elle est tressée en tant qu'algèbre de Hopf — par un tressage qui est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson.

Si la paire  $(H, \mathfrak{R})$  est une algèbre tressée, il résulte de la définition que  $\mathfrak{R}$  vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique — QYBE dans la suite — dans  $\text{End}(H^{\otimes 3})$ , à savoir

$$\mathfrak{R}_{12} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{23} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12}$$

ce qui entraîne que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le groupe des tresses  $\mathcal{B}_n$  agit sur  $H^{\otimes n}$ ; on peut ensuite alors obtenir des invariants de noeuds, selon la recette donnée en [CP], §15.12.

Une algèbre de Hopf  $H$  (dans une catégorie tensorielle) est dite quasitriangulaire (cf. [Dr], [CP]) s'il existe un élément inversible  $R \in H \otimes H$ , appelé  $R$ -matrice de  $H$ , tel que

$$\begin{aligned} R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1} &= \text{Ad}(R)(\Delta(a)) = \Delta^{\text{op}}(a) \\ (\Delta \otimes \text{Id})(R) &= R_{13}R_{23}, \quad (\text{Id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \end{aligned}$$

où  $R_{12}$ ,  $R_{13}$  et  $R_{23}$  sont des éléments de  $H^{\otimes 3}$  définis par  $R_{12} = R \otimes 1$ ,  $R_{23} = 1 \otimes R$  et  $R_{13} = (\sigma \otimes \text{Id})(R_{23}) = (\text{Id} \otimes \sigma)(R_{12})$ . Il résulte alors des identités ci-dessus que  $R$  vérifie la QYBE dans  $H^{\otimes 3}$ , i.e.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Ainsi, les produits tensoriels de  $H$ -modules sont munis d'une action du groupe des tresses. En outre, il est clair que si  $(H, R)$  est quasitriangulaire, alors  $(H, \text{Ad}(R))$  est tressée.

**1.3 Les objets quantiques.** Soit  $\mathcal{A}$  la catégorie dont les objets sont les  $k[[h]]$ -modules topologiquement libres et complets au sens  $h$ -adique, et les morphismes sont les applications  $k[[h]]$ -linéaires continues. Pour tous  $V, W$  dans  $\mathcal{A}$ , définissons  $V \otimes W$  comme étant la limite projective des  $k[[h]]/(h^n)$ -modules  $(V/h^n V) \otimes_{k[[h]]/(h^n)} (W/h^n W)$ : cela fait de  $\mathcal{A}$  une catégorie tensorielle (voir [CP] pour plus de détails). D'après Drinfel'd (cf. [Dr]), on appelle algèbre enveloppante universelle quantifiée — QUEA dans la suite — toute algèbre de Hopf dans la catégorie  $\mathcal{A}$  dont la limite semi-classique (i.e. la spécialisation en  $h = 0$ ) est l'algèbre enveloppante universelle d'une bigèbre de Lie. De même, on appelle algèbre de Hopf de séries formelles quantiques — QFSHA dans la suite — toute algèbre de Hopf dans la catégorie  $\mathcal{A}$  dont la limite semi-classique est l'algèbre de fonctions sur un groupe formel.

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant:

**Théorème 1.4.** (cf. [EK]) Soit  $\mathfrak{g}$  une bigèbre de Lie. Il existe une QUEA  $U_h(\mathfrak{g})$  dont la limite semi-classique est isomorphe à  $U(\mathfrak{g})$ ; en outre, il existe un isomorphisme de  $k[[h]]$ -modules tel que  $U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})[[h]]$ .

De plus, si  $(\mathfrak{g}, r)$  est quasitriangulaire, alors il existe une QUEA  $U_h(\mathfrak{g})$  comme ci-dessus et un élément  $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$  tels que  $(U_h(\mathfrak{g}), R_h)$  soit une algèbre de Hopf quasitriangulaire et  $R_h = 1 + r h + O(h^2)$  (avec  $O(h^2) \in h^2 \cdot H \otimes H$ ).  $\square$

**1.5 Le foncteur de Drinfeld.** Soit  $H$  une algèbre de Hopf sur  $k[[h]]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $\Delta^n: H \rightarrow H^{\otimes n}$  par  $\Delta^0 := \epsilon$ ,  $\Delta^1 := \text{Id}_H$  et  $\Delta^n := (\Delta \otimes \text{Id}_H^{\otimes (n-2)}) \circ \Delta^{n-1}$  si  $n > 2$ . Pour tout sous-ensemble ordonné  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  avec  $i_1 < \dots < i_k$ , on définit l'homomorphisme  $j_\Sigma: H^{\otimes k} \rightarrow H^{\otimes n}$  par  $j_\Sigma(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) := b_1 \otimes \dots \otimes b_n$

avec  $b_i := 1$  si  $i \notin \Sigma$  et  $b_{i_m} := a_m$  pour  $1 \leq m \leq k$ ; on pose alors  $\Delta_\Sigma := j_\Sigma \circ \Delta^k$ . On définit aussi  $\delta_n: H \longrightarrow H^{\otimes n}$  par  $\delta_n := \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} \Delta_\Sigma$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}_+$ , et plus généralement, pour tout  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , avec  $i_1 < \dots < i_k$ , on définit

$$\delta_\Sigma := \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} (-1)^{|\Sigma| - |\Sigma'|} \Delta_{\Sigma'}. \quad (1.1)$$

En particulier,  $\delta_{\{1, \dots, n\}} = \delta_n$ . Grâce au principe d'inclusion-exclusion, ceci équivaut à

$$\Delta_\Sigma = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} \delta_{\Sigma'} \quad (1.2)$$

pour tout  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  avec  $i_1 < \dots < i_k$ . Enfin on définit le sous-espace

$$H' := \{a \in H \mid \delta_n(a) \in h^n H^{\otimes n}\},$$

de  $H$  que nous considérerons muni de la topologie induite. Nous avons alors le

**Théorème 1.6.** (cf. [Dr], §7, ou [G3]) *Soit  $H$  une algèbre de Hopf dans la catégorie  $\mathcal{A}$ . Alors  $H'$  est une QFSHA. De plus, si  $H = U_h(\mathfrak{g})$  est une QUEA ayant  $U(\mathfrak{g})$  comme limite semi-classique, alors la limite semi-classique de  $U_h(\mathfrak{g})'$  est  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .  $\square$*

## § 2. Les résultats principaux

Du point de vue technique, le résultat principal de cet article concerne le cadre général des algèbres de Hopf quasitriangulaires:

**Théorème 2.1.** *Soit  $H$  une algèbre de Hopf quasitriangulaire dans la catégorie  $\mathcal{A}$ , et soit  $R$  sa  $R$ -matrice. Alors, l'automorphisme intérieur  $\text{Ad}(R): H \otimes H \rightarrow H \otimes H$  se restreint en un automorphisme de  $H' \otimes H'$ . La paire  $(H', \text{Ad}(R)|_{H' \otimes H'})$  est donc une algèbre de Hopf tressée dans la catégorie  $\mathcal{A}$ .  $\square$*

La preuve de ce théorème sera donnée dans le paragraphe 3. Mais nous pouvons déjà en tirer comme conséquence le résultat principal annoncé par le titre et dans l'introduction, qui nous donne une interprétation géométrique de la  $r$ -matrice classique:

**Théorème 2.2.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Alors l'algèbre de Hopf Poisson topologique  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  est tressée. En outre, il existe une quantification de  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  qui est une algèbre de Hopf tressée dont l'opérateur de tressage se spécialise en celui de  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ .*

*Preuve.* Soit  $r$  la  $r$ -matrice de  $\mathfrak{g}$ . D'après le Théorème 1.4, il existe une QUEA quasitriangulaire  $(U_h(\mathfrak{g}), R_h)$  dont la limite semi-classique est exactement  $(U(\mathfrak{g}), r)$  à savoir,  $U_h(\mathfrak{g})/hU_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$  et  $(R - 1)/h \equiv r \pmod{hU_h(\mathfrak{g})^{\otimes 2}}$ . Par le Théorème 1.6, la limite semi-classique de  $U_h(\mathfrak{g})'$  est  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ . Soit  $\mathfrak{R}_h := \text{Ad}(R_h)$ ; le Théorème 2.1 nous assure que  $(U_h(\mathfrak{g})', \mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'})$  est une algèbre de Hopf tressée, donc sa limite semi-classique  $(F[[\mathfrak{g}^*]], (\mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'})|_{h=0})$  est tressée aussi. De plus, comme  $\mathfrak{R}_h$  est un automor-

phisme d'algèbre et le crochet de Poisson de  $F[[\mathfrak{g}^*]]$  est donné par  $\{a, b\} = ([\alpha, \beta]/h)|_{h=0}$  pour tout  $a, b \in F[[\mathfrak{g}^*]]$  et  $\alpha, \beta \in U_h(\mathfrak{g})'$  tels que  $\alpha|_{h=0} = a$ ,  $\beta|_{h=0} = b$ , nous avons que  $\left(\mathfrak{R}_h|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'}\right)|_{h=0}$  est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson.  $\square$

Le théorème ci-dessus donne donc une interprétation géométrique de la  $r$ -matrice d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Ce même résultat avait été démontré pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$  par Reshetikhin (cf. [Re]), et généralisé par le premier auteur au cas où  $\mathfrak{g}$  est de Kac-Moody de type fini (cf. [G1], où une analyse plus précise est effectuée) ou de type affine (cf. [G2]).

Le Théorème 2.2 a aussi une conséquence importante. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  comme ci-dessus, soit  $\mathfrak{R}$  le tressage de  $F[[\mathfrak{g}^*]]$ , et soit  $\mathfrak{e}$  l'idéal maximal (unique) de  $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]] = F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$  (produit tensoriel topologique, selon [Di], Ch. 1). Puisque  $\mathfrak{R}$  est un automorphisme d'algèbre,  $\mathfrak{R}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}$  et  $\mathfrak{R}$  induit un automorphisme d'espace vectoriel  $\overline{\mathfrak{R}}: \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \rightarrow \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$ ; or  $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ , donc puisque  $\mathfrak{R}$  est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson, la restriction  $\overline{\mathfrak{R}}$  est un automorphisme d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$ ; l'automorphisme  $\overline{\mathfrak{R}}$  hérite aussi des autres propriétés du tressage  $\mathfrak{R}$ . Enfin, le dual  $\overline{\mathfrak{R}}^*: \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$  est un automorphisme de cogèbre de Lie de  $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ , doté lui aussi de plusieurs autres propriétés duales de celles de  $\overline{\mathfrak{R}}$ . En particulier,  $\mathfrak{R}$ ,  $\overline{\mathfrak{R}}$  et  $\overline{\mathfrak{R}}^*$  sont solutions de la QYBE. Il existe donc une action du groupe des tresses  $\mathcal{B}_n$  sur  $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]]^{\otimes n}$ , sur  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^{\otimes n}$ , et sur  $(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*)^{\otimes n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), dont on peut tirer des invariants de noeuds (selon [CP], §15.12).

De tels automorphismes de  $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$  et de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$  ont été introduits dans [WX], §9; leur construction est liée à la "R-matrice globale", qui donne aussi une interprétation géométrique de la  $r$ -matrice classique. Il conviendrait alors de comparer nos résultats et ceux de [WX] et d'étudier parallèlement les propriétés de fonctorialité de notre construction: tout cela fera l'objet d'un article à suivre.

### § 3. Démonstration du théorème 2.1

Dans cette section  $(H, R)$  sera une algèbre de Hopf quasitriangulaire comme dans l'énoncé du Théorème 2.1. Nous voulons étudier l'action adjointe de  $R$  sur  $H \otimes H$ , où cette dernière est munie de sa structure naturelle d'algèbre de Hopf; nous noterons par  $\tilde{\Delta}$  son coproduit, défini par  $\tilde{\Delta} := \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \text{Id}_H \otimes \text{Id}_H) \circ (\text{Id}_H \otimes \Delta)$  où  $\sigma_{23}$  désigne la volte dans les positions 2 et 3. Nous noterons aussi  $I := 1 \otimes 1$  l'unité dans  $H \otimes H$ . Selon notre définition du produit tensoriel en  $\mathcal{A}$ , on a  $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$ . Notre but est de montrer que, bien que  $R$  n'appartienne pas forcément à  $(H \otimes H)'$ , son action adjointe  $a \mapsto R \cdot a \cdot R^{-1}$  laisse stable  $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$ .

Posons tout d'abord, pour  $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , toujours avec  $i_1 < \dots < i_k$ :

$$R_\Sigma := R_{2i_1-1, 2i_k} R_{2i_1-1, 2i_{k-1}} \cdots R_{2i_1-1, 2i_1} R_{2i_2-1, 2i_k} \cdots R_{2i_{k-1}-1, 2i_k} R_{2i_k-1, 2i_1} \cdots R_{2i_k-1, 2i_1}$$

(produit de  $k^2$  termes) où  $R_{r,s} := j_{\{r,s\}}(R)$ , en définissant  $j_{\{r,s\}}: H \otimes H \rightarrow H^{\otimes 2n}$  comme précédemment. Nous noterons toujours  $|\Sigma|$  pour le cardinal de  $\Sigma$  (ici  $|\Sigma| = k$ ).

**Lemme 3.1.** Dans  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ , pour tout  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ , on a:  $\tilde{\Delta}_\Sigma(R) = R_\Sigma$ .

*Preuve.* Sans perdre de généralité, nous démontrerons le résultat pour  $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ , i.e.

$$\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(R) = R_{\{1, \dots, n\}} = R_{1, 2n} \cdot R_{1, 2n-2} \cdots R_{1, 2} \cdot R_{3, 2n} \cdots R_{2n-3, 2} \cdot R_{2n-1, 2n} \cdots R_{2n-1, 2}.$$



Le résultat est évident au rang  $n = 1$ . Supposons le acquis au rang  $n$ , et montrons le au rang  $n + 1$ ; par définition de  $\tilde{\Delta}$  et par les propriétés de la  $R$ -matrice on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n+1\}}(R) &= \left( \tilde{\Delta} \otimes \text{Id}_{H \otimes H}^{\otimes n-1} \right) \left( \tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(R) \right) = \left( \tilde{\Delta} \otimes \text{Id}_{H \otimes H}^{\otimes n-1} \right) (R_{\{1, \dots, n\}}) \\
&= \sigma_{23}(\Delta \otimes \text{Id}_H^{\otimes 2n}) \left( \text{Id}_H \otimes \Delta \otimes \text{Id}_H^{\otimes 2(n-1)} \right) (R_{1,2n} \cdots R_{1,2} \cdots R_{3,2} \cdots R_{2n-1,2}) \\
&= \sigma_{23}(\Delta \otimes \text{Id}_H^{\otimes 2n}) (R_{1,2n+1} \cdots R_{1,3} R_{1,2} \cdots R_{4,3} R_{4,2} \cdots R_{2n,3} R_{2n,2}) \\
&= \sigma_{23}(R_{1,2n+2} R_{2,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{2,4} R_{1,3} R_{2,3} \cdots R_{5,4} R_{5,3} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,3}) \\
&= R_{1,2n+2} R_{3,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{3,4} \cdot R_{1,2} R_{3,2} \cdots R_{5,4} \cdot R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{1,2n+2} \cdots R_{1,4} R_{1,2} R_{3,2n+2} \cdots R_{3,4} R_{3,2} \cdots R_{5,4} R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4} R_{2n+1,2} \\
&= R_{\{1, \dots, n+1\}}, \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

Dorénavant pour tout,  $a, b \in \mathbb{N}$ , nous utiliserons la notation  $C_b^a$  pour désigner l'entier  $\binom{b}{a} := \frac{b!}{a!(b-a)!} \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 3.2.** *Pour tout  $a \in (H \otimes H)'$ , et pour tout ensemble  $\Sigma$  tel que  $|\Sigma| > i$ , on a*

$$\tilde{\Delta}_{\Sigma}(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| \leq i} (-1)^{i-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{i+1}).$$

*Preuve.* Il suffit de prouver l'énoncé pour  $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ , avec  $n > i$ . Grâce à (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1, \dots, n\}}(a) &= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) = \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}, |\bar{\Sigma}| \leq i} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1, \dots, n\}, |\bar{\Sigma}| \leq i} \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma}} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\}, |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma}, |\bar{\Sigma}| \leq i} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|} + O(h^{i+1}) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\}, |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) (-1)^{i-|\Sigma'|} C_{n-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} + O(h^{i+1}), \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

Avant de nous attaquer au résultat principal, il nous faut encore un petit rappel technique sur les coefficients du binôme: on peut le prouver facilement en utilisant le développement en série formelle de  $(1 - X)^{-(r+1)}$ , à savoir  $(1 - X)^{-(r+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^r X^k$ .

**Lemme 3.3.** *Soient  $r, s, t \in \mathbb{N}$  tels que  $r < t$ . On a alors les relations suivantes (où l'on pose  $C_u^v := 0$  si  $v > u$ ):*

$$(a) \quad \sum_{d=0}^t (-1)^d C_{d-1}^r C_t^d = -(-1)^r, \quad (b) \quad \sum_{d=0}^t (-1)^d C_{d+s}^r C_t^d = 0. \quad \square$$

Voici enfin le résultat principal de cette section:

**Proposition 3.4.** *Pour tout  $a \in (H \otimes H)'$ , nous avons  $R a R^{-1} \in (H \otimes H)'$ .*

*Preuve.* Comme nous devons montrer que  $R a R^{-1}$  appartient à  $(H \otimes H)'$ , nous devons considérer les termes  $\delta_n(R a R^{-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pour cela réécrivons  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1})$  en utilisant le Lemme 3.1 et le fait que  $\tilde{\Delta}$ , et plus généralement  $\tilde{\Delta}_{\{i_1, \dots, i_k\}}$  (pour  $k \leq n$ ), est un morphisme d'algèbre:  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{-1}$ .

Nous allons démontrer par récurrence sur  $i$  que

$$\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = O(h^{i+1}) \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq n-1. \quad (\star)$$

Autrement dit, on verra que tous les termes du développement limité à l'ordre  $n-1$  sont nuls, donc  $\delta_n(R a R^{-1}) = O(h^n)$ , d'où notre énoncé.

Pour  $i = 0$ , on a, pour chaque  $\Sigma$ ,  $\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \epsilon(a) I^{\otimes n} + O(h)$ ,  $R_\Sigma = I^{\otimes n} + O(h)$ , et aussi  $R_\Sigma^{-1} = I^{\otimes n} + O(h)$ , d'où  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} \epsilon(a) I^{\otimes n} + O(h) = O(h)$ , donc le résultat  $(\star)$  est vrai pour  $i = 0$ .

Supposons le résultat  $(\star)$  acquis pour tout  $i' < i$ . Écrivons les développements  $h$ -adiques de  $R_\Sigma$  et  $R_\Sigma^{-1}$  sous la forme  $R_\Sigma = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_\Sigma^{(\ell)} h^\ell$  et  $R_\Sigma^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} R_\Sigma^{(-m)} h^m$ . Par la proposition précédente, nous avons une approximation de  $\tilde{\Delta}_\Sigma(a)$  à l'ordre  $j$ :

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| \leq j} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O(h^{j+1}).$$

Nous avons alors l'approximation de  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1})$  suivante:

$$\begin{aligned} \delta_{\{1, \dots, n\}}(R a R^{-1}) &= \sum_{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}} \sum_{\ell+m \leq i} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{(-m)} h^{\ell+m} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^i \sum_{\ell+m=i-j} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma| > j}} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \Sigma \\ |\Sigma'| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_\Sigma(a) R_\Sigma^{(-m)} \right) h^{\ell+m} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^i \sum_{\ell+m+j=i} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} R_\Sigma^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_\Sigma^{(-m)} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-|\Sigma'|} R_{\Sigma'}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma'}^{(-m)} \right) h^{\ell+m} + O(h^{i+1}). \end{aligned}$$

Nous noterons (E) la dernière expression entre parenthèse, et nous montrerons que cette expression est nulle, d'où  $\delta_n(R a R^{-1}) = O(h^{i+1})$ .

Regardons d'abord les termes correspondant à  $\ell + m = 0$ , c'est-à-dire  $j = i$ . On retrouve alors  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(a)$ , qui est dans  $O(h^{i+1})$  par hypothèse. Dans la suite du calcul nous supposons désormais  $\ell + m > 0$ .

Regardons maintenant comment les termes  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  et  $R_{\Sigma}^{(-m)}$  agissent sur  $(H \otimes H)^{\prime \otimes n}$  (respectivement à gauche et à droite) pour  $\ell + m$  fixé (et positif), disons  $\ell + m = S$ . En faisant le développement limité de chaque  $R_{i,j}$  qui apparaît dans  $R_{\Sigma}$ , on voit que  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  et  $R_{\Sigma}^{(-m)}$  sont sommes de produits d'au plus  $\ell$  et  $m$  termes respectivement, chacun agissant sur au plus deux facteurs tensoriels de  $(H \otimes H)^{\prime \otimes n}$ . Nous allons réécrire  $\sum_{\ell+m=S} R_{\Sigma}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma}^{(-m)}$  en regroupant les termes de la somme qui agissent sur les mêmes facteurs de  $(H \otimes H)^{\prime \otimes n}$ , facteurs dont nous identifierons les positions par  $\Sigma''$ .

Si  $i$  appartient à  $\Sigma''$ , dans l'identification  $(H \otimes H)^{\otimes n} = H^{\otimes 2n}$  (telle qu'on l'a choisie pour définir  $R_{\Sigma}$ ) l'indice  $i$  correspond à la paire  $(2i-1, 2i)$ ; mais alors  $R_{\Sigma}$  et  $R_{\Sigma}^{-1}$ , et donc aussi chaque  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  et chaque  $R_{\Sigma}^{(-m)}$ , n'agissent de manière non triviale sur le  $i$ -ème facteur de  $\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)$  que si, dans l'écriture explicite de  $R_{\Sigma}$ , un terme non trivial apparaît aux places  $2i-1$  ou  $2i$ , donc seulement si  $i \in \Sigma$ : ainsi  $\Sigma'' \subseteq \Sigma$ . Nous posons alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_{\Sigma}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma}^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma, \Sigma''}^{(S)}(a).$$

Maintenant considérons  $\bar{\Sigma} \supseteq \Sigma$ . D'après la définition on a  $R_{\bar{\Sigma}} = R_{\Sigma} + \mathcal{A}$ , où  $\mathcal{A}$  est une somme de termes qui contiennent des facteurs  $R_{2i-1, 2j}^{(s)}$  avec  $\{i, j\} \not\subseteq \Sigma$ : pour ce voir, il suffit de développer chaque facteur  $R_{a,b}$  dans  $R_{\bar{\Sigma}}$  comme  $R_{a,b} = 1^{\otimes 2n} + O(h)$ . De même, on a aussi  $R_{\bar{\Sigma}}^{(\ell)} = R_{\Sigma}^{(\ell)} + \mathcal{A}'$ , et pareillement  $R_{\bar{\Sigma}}^{(-m)} = R_{\Sigma}^{(-m)} + \mathcal{A}''$ . Cela implique que  $A_{\Sigma'', \bar{\Sigma}, \Sigma'}^{(S)}(a) = A_{\Sigma'', \Sigma, \Sigma'}^{(S)}(a)$ , et donc les  $A_{\Sigma'', \Sigma, \Sigma'}^{(S)}(a)$  ne dépendent pas de  $\Sigma$ ; on écrit alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_{\Sigma}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma}^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(S)}(a).$$

Nous allons ensuite réécrire  $(E)$  à l'aide des  $A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(S)}(a)$ . Par commodité dans la suite des calculs, on notera  $\delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'}$  la fonction qui vaut 1 si  $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$  et 0 sinon. Nous obtenons alors une nouvelle expression pour  $\delta_{\{1, \dots, n\}}(RaR^{-1})$ , à savoir

$$\begin{aligned} \delta_{\{1, \dots, n\}}(RaR^{-1}) &= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) + (-1)^{n-|\Sigma'|} \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) \left. \right) h^{i-j} + O(h^{i+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} h^{i-j} \sum_{\Sigma'' \subseteq \{1, \dots, n\}} A_{\Sigma', \Sigma'', \Sigma}^{(i-j)}(a) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'} \right) + O(h^{i+1}). \end{aligned}$$

Notons  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  la nouvelle expression entre parenthèse; autrement dit, pour  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$  fixées, avec  $|\Sigma'| \leq j$ , on pose

$$(E')_{\Sigma', \Sigma''} := \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \delta_{\Sigma'' \subseteq \Sigma'}$$

(au passage, remarquons que celle-ci est une expression purement combinatoire); nous allons montrer que cette expression est nulle lorsque  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$  sont telles que  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq j - i + |\Sigma'|$  et  $|\Sigma'| \leq j$ . En vertu du lemme suivant, ceci suffira pour prouver la proposition.

**Lemme 3.5.**

(a) On a  $j < i$  et  $i \leq n - 1$ , donc  $j \leq n - 2$ .

(b) Pour tout  $S > 0$ , dans l'expression  $\sum_{\ell+m=S} R_{\Sigma}^{(\ell)} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) R_{\Sigma}^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a)$

on a  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a) = 0$  pour tout  $\Sigma', \Sigma''$  tels que  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > S + |\Sigma'|$ .

*Preuve.* La première assertion est évidente; pour montrer la deuxième nous étudions l'action adjointe de  $R_{\Sigma}$  sur  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ .

Premièrement, sur  $k \cdot I^{\otimes n}$  l'action de ces éléments donne un terme nul car on retrouve le terme à l'ordre  $S$  du développement  $h$ -adique de  $R_{\Sigma} \cdot R_{\Sigma}^{-1} = 1$  (pour  $S > 0$ ).

Deuxièmement, considérons  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ , et étudions l'action sur  $(H \otimes H)_{\Sigma'} := j_{\Sigma'} \left( (H \otimes H)^{\otimes |\Sigma|} \right) (\subseteq (H \otimes H)^{\otimes n})$ . On sait que  $R_{\Sigma}$  est un produit de  $|\Sigma|^2$  termes du type  $R_{a,b}$ , avec  $a, b \in \{2i-1, 2j \mid i, j \in \Sigma\}$ ; analysons donc ce qui se passe lorsqu'on fait le produit  $P := R_{\Sigma} \cdot x \cdot R_{\Sigma}^{-1}$  si  $x \in (H \otimes H)_{\Sigma'}$ .

Considérons le facteur  $R_{a,b}$  qui apparaît le plus à droite: si  $a, b \notin \{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ , alors en calculant  $P$  on trouve  $P := R_{\Sigma} x R_{\Sigma}^{-1} = R_{\star} R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_{\star}^{-1} = R_{\star} x R_{\star}^{-1}$  (où  $R_{\star} := R_{\Sigma} R_{a,b}^{-1}$ ). De même, en avançant de droite à gauche le long de  $R_{\Sigma}$  on peut écarter tous les facteurs  $R_{c,d}$  de ce type, à savoir tels que  $c, d \notin \{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ . Ainsi le premier facteur dont l'action adjointe est non triviale sera nécessairement du type  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  avec l'un des deux indices appartenant à  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ , soit par exemple  $\bar{a}$ . Notons que le nouvel indice  $\bar{a}$  ( $\in \{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ ), qui agit sur un facteur tensoriel dans  $H^{\otimes 2n}$ , correspond à un nouvel indice  $j_{\bar{a}}$  ( $\in \{1, \dots, n\}$ ), agissant sur un facteur tensoriel de  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ . Ainsi pour les facteurs successifs — i.e. à gauche de  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  — il faut répéter la même analyse, mais avec l'ensemble  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma' \cup \{j_{\bar{a}}\}\}$  à la place de  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$ ; donc, comme  $R_{\bar{a}, \bar{b}}$  pouvait agir de manière non triviale sur au plus  $|\Sigma'|$  facteurs de  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ , de même le facteur plus proche à sa gauche ne peut agir de manière non triviale que sur au plus  $|\Sigma'| + 1$  facteurs. La conclusion est que l'action adjointe de  $R_{\Sigma}$  est non triviale sur au plus  $|\Sigma'| + |\Sigma|$  facteurs de  $(H \otimes H)^{\otimes n}$ .

Maintenant, considérons les différents termes  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  et  $R_{\Sigma}^{(-m)}$ , avec  $\ell + m = S$ , et étudions les produits  $R_{\Sigma}^{(\ell)} \cdot x \cdot R_{\Sigma}^{(-m)}$ , avec  $x \in (H \otimes H)_{\Sigma'}$ . On sait déjà que  $R_{\Sigma}^{(\ell)}$  et  $R_{\Sigma}^{(-m)}$  sont sommes de produits, notés  $P_+$  et  $P_-$ , d'au plus  $\ell$  et  $m$  termes respectivement, du type  $R_{i,j}^{(\pm k)}$ ; les termes  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a)$  ne sont alors que des sommes de termes du type  $P_+ \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) P_-$ , où de plus les “indices” intervenant dans  $P_+$  et  $P_-$  sont

dans  $\Sigma''$ . Or, comme chaque  $P_+$  et chaque  $P_-$  est un produit d'au plus  $\ell$  et  $m$  facteurs  $R_{i,j}^{(\pm k)}$ , on peut raffiner l'argument précédent. Considérons seulement le terme à l'ordre  $S$  du développement  $h$ -adique de  $P := R_\Sigma x R_\Sigma^{-1} = R_\star R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_\star^{-1} = R_\star x R_\star^{-1}$  : lorsque il y a des facteurs du type  $R_{a,b}^{(k)}$  ou  $R_{a,b}^{(t)}$ , pour  $a, b$  fixés — n'appartenant pas à  $\{2j-1, 2j \mid j \in \Sigma'\}$  — qui apparaissent dans  $R_\Sigma^{(\ell)}$  ou  $R_\Sigma^{(-m)}$ , pour certains  $\ell$  ou  $m$ , la contribution totale de tous ces termes dans la somme  $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} x R_\Sigma^{(-m)}$  sera nulle (cela vient du fait que  $R_\star R_{a,b} x R_{a,b}^{-1} R_\star^{-1} = R_\star x R_\star^{-1}$ ). De plus, comme maintenant on ne considère que  $S$  facteurs au total, on conclut que  $A_{\Sigma', \Sigma''}^{(S)}(a) = 0$  si  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > S + |\Sigma'|$ .  $\square$

Calculons maintenant  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$ . Grâce à la remarque précédente, nous pouvons nous limiter aux paires  $(\Sigma', \Sigma'')$  telles que  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq i - j + m + |\Sigma'| \leq i - j + j = i \leq n - 1$ . On pourra alors toujours trouver au moins deux  $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$  tels que  $|\Sigma| > j$  et  $\Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma$ , ce qui nous assure qu'il y'aura toujours au moins deux termes dans le comptage qui va suivre (condition qui assurera la nullité de l'expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$ ). Nous allons distinguer trois cas :

(I) Si  $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$ , alors l'expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  devient

$$(E' : 1)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}.$$

En regroupant les  $\Sigma$  qui ont le même cardinal  $d$ , un simple comptage nous donne

$$(E' : 1)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=j+1}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma'|}^{d-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}.$$

Or, cette dernière expression est nulle d'après le Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type  $\sum_{k=r+1}^t (-1)^{t+r-k} C_{k-1}^r C_t^k + (-1)^t = \sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k-1}^r C_t^k + (-1)^t$  (où  $C_u^v := 0$  si  $v > u$ ) avec  $r, t \in \mathbb{N}_+$  et  $r < t$  : dans notre cas on a posé  $t = n - |\Sigma'|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$  et  $k = d - |\Sigma'|$  ; on vérifie que l'on a  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  parce que  $j < n$ .

(II) Si  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$  et  $|\Sigma' \cup \Sigma''| > j$ , alors l'expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  devient

$$(E' : 2)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}.$$

En regroupant les  $\Sigma$  qui ont le même cardinal  $d$ , un simple comptage nous donne

$$(E' : 2)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=|\Sigma' \cup \Sigma''|}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|}.$$

À nouveau, cette dernière expression est nulle grâce au Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type  $\sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k$  avec  $r, t, s \in \mathbb{N}_+$  et  $r < t$  : dans notre cas

on a posé  $t = n - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$ ,  $s = |\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1$  et  $k = d - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ; on vérifie que l'on a  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  car  $j < n$  et  $|\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1 \geq 0$  car  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$ .

(III) Si  $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$  et  $|\Sigma' \cup \Sigma''| \leq j$ , alors l'expression  $(E')_{\Sigma', \Sigma''}$  devient

$$(E' : 3)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}.$$

Si l'on regroupe les  $\Sigma$  qui ont le même cardinal  $d$ , un simple comptage nous donne

$$(E' : 3)_{\Sigma', \Sigma''} = \sum_{d=j+1}^n (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|}.$$

Mais encore la dernière expression est nulle d'après le Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type  $\sum_{k=j+1-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k = \sum_{k=0}^t (-1)^{t+r-k} C_{k+s}^r C_t^k$  (où  $C_u^v := 0$  si  $v > u$ ) avec  $r, t, s \in \mathbb{N}_+$  et  $r < t$ : ici on a encore posé  $t = n - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ,  $r = j - |\Sigma'|$ ,  $s = |\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1$  et  $k = d - |\Sigma' \cup \Sigma''|$ ; on a, toujours pour les mêmes raisons,  $j - |\Sigma'| < n - |\Sigma'|$  et  $|\Sigma' \cup \Sigma''| - |\Sigma'| - 1 \geq 0$ .

En conclusion, on a toujours  $(E')_{\Sigma', \Sigma''} = 0$ , d'où  $(E) = 0$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

## REFERENCES

- [CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Di] J. Dixmier, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Applied Mathematics **20** (1973).
- [Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. Intern. Congress of Math. (Berkeley, 1986), 1987, pp. 798–820.
- [EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. (New Series) **2** (1996), 1–41.
- [G1] F. Gavarini, *Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum groups at Roots of 1*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 95–117.
- [G2] F. Gavarini, *The R-matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1* (to appear in Jour. Pure Appl. Algebra).
- [G3] F. Gavarini, *The quantum duality principle*, Preprint.
- [On] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **20** (1993).
- [Re] N. Reshetikhin, *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 79–99.
- [WX] A. Weinstein, P. Xu, *Classical Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation*, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 309–343.

<sup>†</sup> UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “TOR VERGATA” — DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 1 — I-00133 ROMA, ITALY — E-MAIL: GAVARINI@MAT.UNIROMA2.IT

<sup>‡</sup> INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE — E-MAIL: HALBOUT@MATH.U-STRASBG.FR  
7, RUE RENÉ DESCARTES — 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE